

УДК 539.4

Холодняк Ю. С., Периг А. В., Матвеев И. А.

ОСОБЕННОСТИ ПРОЧНОСТНЫХ РАСЧЕТОВ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ВЫНУЖДЕННЫМ КОЛЕБАНИЯМ

Вынужденные колебания стержневых конструкций (балок, рам, ферм) возникают вследствие воздействия на них, так называемых возмущающих сил. Наиболее часто источником таких сил является работа различных вибраторов, поршневых насосов, электродвигателей со статически неотбалансированными вращающимися массами и другого оборудования, установленного на этих конструкциях и оказывающего на них периодически изменяющееся во времени (обычно по гармоническому закону) силовое воздействие.

В процессе колебаний в этих конструкциях возникают дополнительные (динамические) усилия и напряжения, которые в ряде случаев достигают значительных величин и существенно влияют на прочность конструкций. Отсюда – важность адекватного учета динамики колебательных процессов в прочностных расчётах названных конструкций.

Следует отметить, что механические колебания вообще и вынужденные колебания в частности достаточно полно и всесторонне исследованы и описаны в литературе. Вместе с тем специфика этих колебаний в практических расчётах часто учитывается не в полной мере, что чревато получением искажённых результатов.

Так, при определении максимальных напряжений, возникающих в колеблющихся конструкциях, обычно упускается из виду начальная стадия процесса, в которой наряду с вынужденными колебаниями присутствуют и колебания собственные. Такое упрощение оправдывается тем, что собственные колебания, сопутствующие вынужденным, со временем затухают из-за сопротивления среды [1–4]. Однако силовое воздействие на конструкцию максимально именно в начале колебательного процесса, когда в нём присутствуют оба из обозначенных колебаний, накладывающихся друг на друга и образующих хаотические движения – биения. В случае же отсутствия сопротивления среды такое наложение продолжается на протяжении всего процесса колебаний. Погрешность, вносимая указанным упрощением, неизвестна. На её оценку и минимизацию нацелена настоящая работа, являющаяся логическим продолжением ранее опубликованных работ авторов по вопросам прочности стержневых конструкций [5–9].

Целью работы является анализ влияния параметров колебательного процесса на точность прочностных расчетов стержневых конструкций, подверженных вынужденным колебаниям, и поиск путей совершенствования методики таких расчетов.

Рассмотрим вначале конкретную задачу определения максимальных нормальных напряжений, возникающих в стальной консольной балке, при работе установленного на ней электродвигателя со статически неотбалансированным ротором. Задача именно такого типа предлагается студентам в сборнике заданий к выполнению расчетно-графических работ по курсу сопротивления материалов [10].

Задачу решим при следующих исходных данных и допущениях. Масса электродвигателя $m = 1\ 000$ кг, его частота вращения $n_{\text{об}} = 1\ 000$ об/мин; модуль возмущающей силы $H = 0,3 \cdot mg$ ($g = 9,81$ м/с² – ускорение силы тяжести); поперечное сечение балки – двутавр 20 ($I_x = 1840$ см⁴; $W_x = 184$ см³, её массой пренебрегаем). Колебания начинаются вследствие включения электродвигателя, т. е. при нулевых начальных условиях. Колебания происходят в воздушной среде; горизонтальными (продольными) колебаниями пренебрегаем, поскольку напряжения от них пренебрежимо малы по сравнению с таковыми от изгиба балки. Начало координат совмещаем с положением статического равновесия электродвигателя, определяемого величиной статической деформации конца балки – Δ_{cm} (рис. 1).

С учётом принятых допущений дифференциальное уравнение вертикальных колебаний системы «электродвигатель – невесомая балка» имеет вид [2]:

$$\ddot{y} + 2n \cdot \dot{y} + k^2 \cdot y = h \cdot \sin(p \cdot t), \quad (1)$$

где $n = \mu/(2m)$; μ – коэффициент пропорциональности в выражении для силы сопротивления среды: $\bar{F}_c = -\mu \cdot \bar{V}$; \bar{V} – скорость электродвигателя; $k = \sqrt{c/m}$ – круговая частота собственных колебаний системы; c – жёсткость конструкции: $c = (m \cdot g)/\Delta_{cm}$; $h = H/m$; p – круговая частота возмущающей силы: $p = \pi \cdot n_{об}/30$; t – время, отсчитываемое от момента включения электродвигателя.

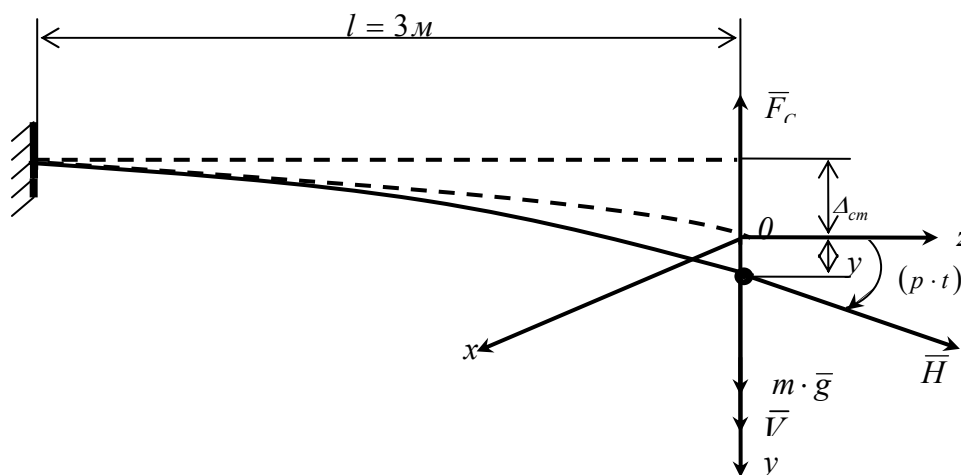


Рис. 1. Схема к решению задачи

При $p \neq k$ (отсутствие резонанса) и $n < k$ (движения – периодические) решением уравнения (1), как известно [2], является выражение:

$$y = e^{-n \cdot t} \cdot (C_1 \cdot \sin(k_1 \cdot t) + C_2 \cdot \cos(k_1 \cdot t)) - \frac{2 \cdot h \cdot p \cdot n}{\left((k^2 - p^2)^2 + 4 \cdot p^2 \cdot n^2 \right)} \cdot \cos(p \cdot t) + \frac{h \cdot (k^2 - p^2)}{\left((k^2 - p^2)^2 + 4 \cdot p^2 \cdot n^2 \right)} \cdot \sin(p \cdot t), \quad (2)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования:

$$C_1 = \frac{1}{k_1} \cdot \left[\dot{y}_0 + n \cdot y_0 + \frac{h \cdot p \cdot (2 \cdot n^2 - k^2 + p^2)}{\left((k^2 - p^2)^2 + 4 \cdot p^2 \cdot n^2 \right)} \right]; \quad C_2 = y_0 + \frac{2 \cdot h \cdot p \cdot n}{\left((k^2 - p^2)^2 + 4 \cdot p^2 \cdot n^2 \right)}; \quad (3)$$

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}. \quad (4)$$

При колебаниях в воздушной среде её сопротивление сравнительно невелико. Если им пренебречь, как это делают авторы упомянутого сборника заданий к выполнению расчетно-графических работ по курсу сопротивления материалов [10], т. е. принять $n = 0$, то при нулевых начальных условиях ($t = 0$; $y_0 = 0$; $\dot{y}_0 = 0$) выражение (2) с учетом (3) и (4) примет предельно простой вид:

$$y = -\frac{h \cdot p}{k \cdot (k^2 - p^2)} \cdot \sin(k \cdot t) + \frac{h}{(k^2 - p^2)} \cdot \sin(p \cdot t) = \frac{h}{k \cdot (k^2 - p^2)} \cdot (k \cdot \sin(p \cdot t) - p \cdot \sin(k \cdot t)). \quad (5)$$

Подсчитаем значения величин, входящих в выражение (5):

$$h = \frac{H}{m} = \frac{0,3m \cdot g}{m} = 0,3 \cdot g = 0,3 \cdot 9,81 = 2,943 \text{ м/с}^2; \quad p = \pi \cdot n_{\text{об}} / 30 = 104,720 \text{ с}^{-1};$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{m \cdot g}{m \cdot \Delta cm}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta cm}} = \sqrt{\frac{g}{m \cdot g \cdot \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{1}{m \cdot \delta_{11}}}, \quad (6)$$

где δ_{11} – прогиб конца балки (где установлен электродвигатель) под действием вертикальной единичной силы $P = 1$ (рис. 2).

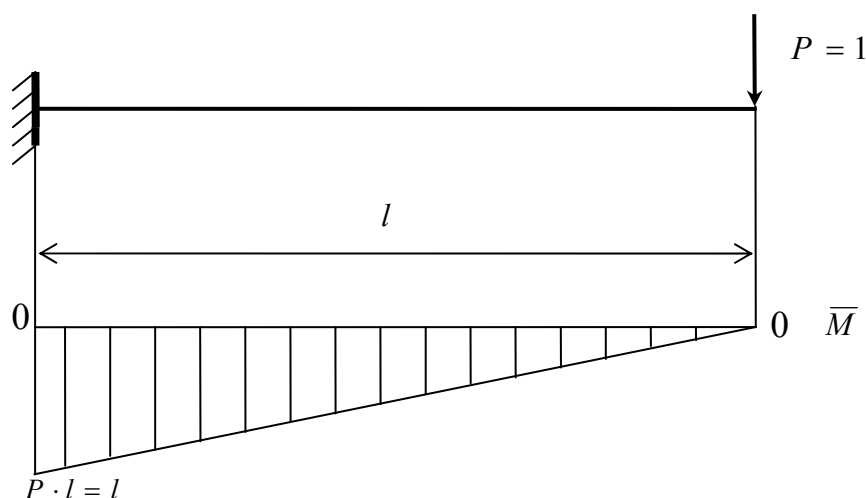


Рис. 2. Схема к определению δ_{11}

Величину δ_{11} определим по правилу Верещагина, используя эпюру изгибающих моментов \bar{M} от единичной силы $P = 1$ (см. рис. 2):

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l = \frac{l^3}{3 \cdot E \cdot I_x} = \frac{3^3 \cdot 10^9}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^4} = 2,446 \cdot 10^{-3} \text{ (мм/Н)} = 2,446 \cdot 10^{-6} \text{ (м/Н)}.$$

С учётом этого $k = \sqrt{\frac{1}{m \cdot \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{1}{1000 \cdot 2,446 \cdot 10^{-6}}} = 20,220 \text{ с}^{-1}.$

Подставив найденные значения величин в выражение (5), получим:

$$y = \frac{2,943 \cdot 10^3}{20,220 \cdot (20,220^2 - 104,720^2)} \cdot (20,220 \cdot \sin(104,720 \cdot t) - 104,720 \cdot \sin(20,220 \cdot t)) =$$

$$= 1,444 \cdot \sin(20,220 \cdot t) - 0,279 \cdot \sin(104,720 \cdot t), \text{ мм} \quad (7)$$

График функции (7) представлен на рис. 3. Из него находим максимальное значение этой функции: $y_{\text{MAX}} \approx 1,7 \text{ мм}.$

Определяем максимальную нагрузку на балку в процессе колебаний:

$$Q_{MAX} = m \cdot g + c \cdot y_{MAX} = m \cdot g + \frac{y_{MAX}}{\delta_{11}} = 1000 \cdot 9,81 + \frac{1,7}{2,446 \cdot 10^{-3}} = 9810 + 695 = 10505 \text{ Н}.$$

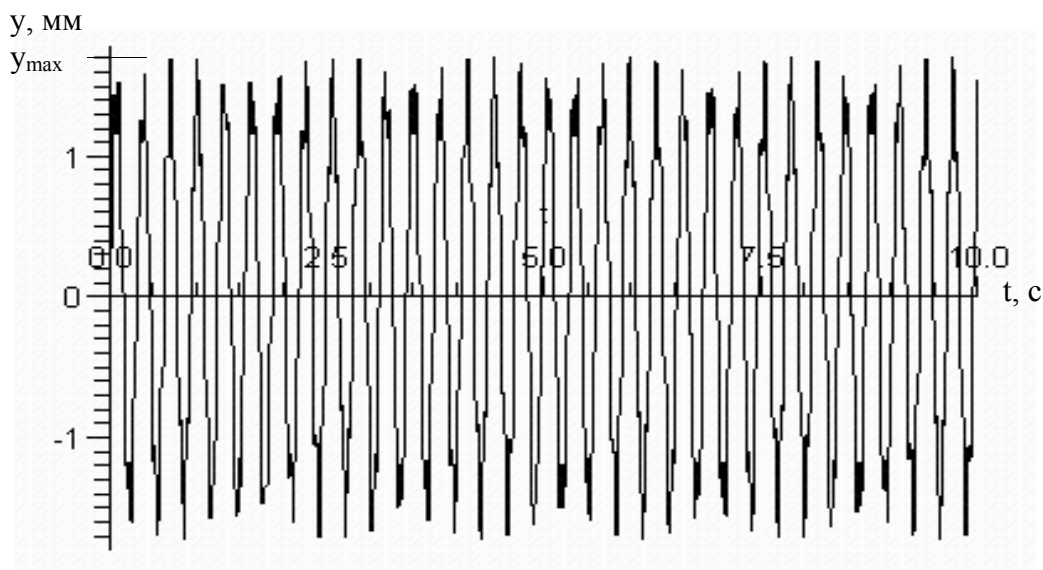


Рис. 3. График функции (7)

Максимальные нормальные напряжения в балке при этом составят:

$$\sigma_{MAX} = \frac{\bar{M}_{MAX}}{W_x} \cdot Q_{MAX} = \frac{l}{W_x} \cdot Q_{MAX} = \frac{3 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^3} \cdot 10505 = 171 \text{ МПа}.$$

Сравним теперь этот результат с таковым, полученным при подсчете по методике [10], в которой максимальная нагрузка на упругий элемент вычисляется через амплитуду вынужденных колебаний – A_2 или связанный с нею так называемый коэффициент нарастания амплитуды вынужденных колебаний – β :

$$Q_{MAX}^* = m \cdot g + c \cdot A_2 = m \cdot g + \beta \cdot H, \quad (8)$$

где

$$A_2 = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4 \cdot p^2 \cdot n^2}}; \quad (9)$$

$$\beta = \frac{c \cdot A_2}{H} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right)^2 + \frac{4 \cdot p^2 \cdot n^2}{k^4}}}. \quad (10)$$

При $n = 0$ выражение для β принимает вид:

$$\beta = \frac{1}{\left|1 - (p/k)^2\right|}. \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } Q_{MAX}^* &= m \cdot g + \beta \cdot H = m \cdot g + \frac{H}{\left|1 - (p/k)^2\right|} = 1000 \cdot 9,81 + \frac{0,3 \cdot 1000 \cdot 9,81}{\left|1 - (104,720/20,220)^2\right|} = \\ &= 9810 + 114 = 9924 \text{ Н}; \quad \sigma_{MAX}^* = \frac{\bar{M}_{MAX}}{W_x} \cdot Q_{MAX}^* = \frac{l}{W_x} \cdot Q_{MAX}^* = \frac{3 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^3} \cdot 9924 = 162 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Очевидно, что существующая методика расчёта [10] в сравнении с предлагаемой даёт заметно меньший результат. В рассмотренном примере это уменьшение составляет:

$$\frac{\sigma_{MAX} - \sigma_{MAX}^*}{\sigma_{MAX}} \cdot 100 = \frac{171 - 162}{171} \cdot 100 = 5,3\%.$$

Если же сравнивать только динамические составляющие максимальных напряжений по обеим методикам расчёта, то их отличие будет ещё более существенным. Так, в приведенном примере их отношение (как и отношение динамических составляющих Q_{MAX} и Q_{MAX}^*) составляет $(695/114) = 6.1$, т. е. расчёт по методике [10] занижил результаты более чем в 6 раз, причем именно в то же самое число раз, во сколько y_{MAX} больше A_2 . Так, в условиях рассмотренного примера (при $n = 0$):

$$A_2 = \frac{h}{|k^2 - p^2|} = \frac{2,943 \cdot 10^3}{|20,220^2 - 104,720^2|} = 0,279 \text{ мм. Тогда } y_{MAX}/A_2 = 1,7/0,279 = 6.1.$$

Оценим теперь полученные результаты с более общих позиций. Пусть зависимость $y(t)$ описывается уравнением (5). Тогда:

$$Q_{MAX} = m \cdot g + c \cdot y_{MAX} = m \cdot g + c \cdot \left(\frac{h}{k \cdot |k^2 - p^2|} \right) \cdot f_{MAX}, \quad (12)$$

где f_{MAX} – максимальное значение функции

$$f = k \cdot \sin(p \cdot t) - p \cdot \sin(k \cdot t). \quad (13)$$

Очевидно, что

$$f_{MAX} \leq k + p, \quad (14)$$

т. е. что максимум функции (13), представляющей собой наложение друг на друга двух синусоид с разными круговыми частотами, не превышает суммы их амплитуд. Анализ ряда специально построенных графиков функции (13) с варьированием значений p и k показал, что с достаточной для практических расчётов точностью можно считать:

$$f_{MAX} \approx k + p. \quad (15)$$

С учётом этого получим:

$$Q_{MAX} = m \cdot g + c \cdot \left(\frac{h}{k \cdot |k^2 - p^2|} \right) \cdot (k + p) = m \cdot g + \frac{c \cdot H \cdot (k + p)}{(k \cdot m \cdot |k^2 - p^2|)} = m \cdot g + \frac{k}{|k - p|} \cdot H; \quad (16)$$

$$Q_{MAX} = m \cdot g + \frac{1}{|1 - (p/k)|} \cdot H = m \cdot g + \gamma \cdot H,$$

где γ – безразмерный коэффициент:

$$\gamma = \frac{1}{|1 - (p/k)|}. \quad (17)$$

При расчёте по существующей методике [10] величина Q_{MAX}^* определяется по формуле (8) как $Q_{MAX}^* = m \cdot g + \beta \cdot H$.

Отношение динамических составляющих Q_{MAX} и Q_{MAX}^* составит:

$$\alpha = \frac{\gamma \cdot H}{\beta \cdot H} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{|1 - (p/k)|} \cdot |1 - (p/k)^2| = 1 + \frac{p}{k}. \quad (18)$$

Таким же будет и отношение динамических составляющих максимальных напряжений в конструкции. Проанализируем теперь выражение (18).

При $p < k$ величина α изменяется в пределах:

$$1 < \alpha < 2, \quad (19)$$

т. е. расхождение результатов расчёта при использовании обеих методик не превышает двух раз. В случае же, когда $p > k$, величина α не имеет верхнего предела:

$$\alpha > 2, \quad (20)$$

и расхождение результатов может быть сколь угодно большим.

Таким образом, при отсутствии сопротивления среды ($n = 0$) существующая методика расчета значительно занижает величины динамических усилий и напряжений в колеблющихся конструкциях, при этом степень этого занижения определяется отношением круговых частот возмущающей силы и собственных колебаний упругой системы. Строго говоря, методика [10] в данном случае неприменима в принципе, поскольку она разработана для стадии установившихся вынужденных колебаний (после затухания собственных), тогда как в данном случае собственные колебания не затухают и постоянно сопровождают вынужденные, образуя биения (см. рис. 3).

При наличии сопротивления среды ($n > 0$) собственные колебания становятся затухающими и продолжительность биений сокращается. Однако и в этом случае $u_{MAX} \gg A_2$. Это хорошо видно из графика функции (2), построенного по числовым данным рассмотренной задачи и $n = 0,3 \cdot k$ (рис. 4). В данном случае u_{MAX} больше A_2 в 4,2 раза.

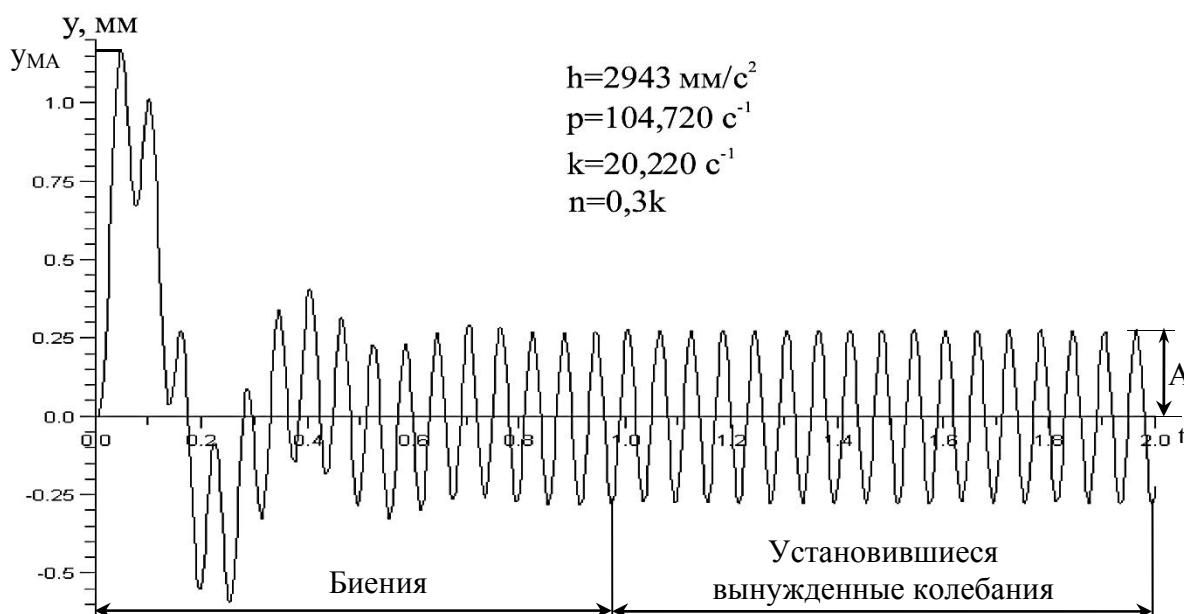


Рис. 4. График функции (2)

Анализ подобных графиков, построенных с варьированием значения n , показал, что с ростом сопротивления среды отношение u_{MAX}/A_2 , характеризующее погрешность существующей методики расчета, плавно уменьшается и при значениях n , близких к предельному ($n = k$), составляет около 3,0, т. е. остается довольно значительным и игнорировать это обстоятельство в практических расчетах нельзя.

ВЫВОДЫ

Существующая методика прочностных расчетов стержневых конструкций, подверженных вынужденным колебаниям, значительно занижает величины динамических усилий и напряжений в этих конструкциях.

При отсутствии сопротивления среды это занижение максимально и определяется отношением круговых частот возмущающей силы и собственных колебаний упругой системы.

Рост сопротивления среды уменьшает погрешности существующей методики, но полностью не устраняет их.

Для повышения точности и надежности расчетов целесообразно отказаться от практики определения максимальной нагрузки на упругий элемент через амплитуду вынужденных колебаний A_2 , а вместо неё использовать максимальное отклонение колеблющейся массы u_{MAX} , определяемое по графику колебательного процесса, построенному с применением компьютерной техники. Такое изменение особенно актуально для колебаний в воздушной и других слабо сопротивляющихся средах.

Все вышеизложенное представляется полезным для студентов и преподавателей высших учебных заведений, читающих курсы сопротивления материалов и других смежных дисциплин, а также практических специалистов, выполняющих прочностные расчеты.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никитин Н. Н. Курс теоретической механики: учебник для студентов машиностроительных и приборостроительных специальностей вузов / Н. Н. Никитин. – М. : Высшая школа, 1990. – 607 с.
2. Сопротивление материалов: учебник для студентов машиностроительных специальностей вузов / Г. С. Писаренко [и др.] – К. : Вища школа, 1986. – 775 с.
3. Дарков А. В. Сопротивление материалов: учебник для техн. вузов / А. В. Дарков, Г. С. Штиро. – М. : Высшая школа, 1989. – 624 с.
4. Шевченко Ф. Л. Курс опору матеріалів. Порада до вивчення теорії та розв'язання задач: навчальний посібник / Ф. Л. Шевченко. – Донецьк : ДонНТУ, 2013. – 260 с.
5. Холодняк Ю. С. Прочностные расчеты в машиностроении и необходимость учета в них эквивалентных напряжений / Ю. С. Холодняк, С. В. Подлесный, Е. Ю. Роменский // Вісник Донбаської державної машинобудівної академії : збірник наукових праць. – Краматорськ : ДДМА, 2006. – № 1 (6Е). – С. 74–80.
6. Особенности прочностного расчёта балок и их учет в изложении технических дисциплин / Ю. С. Холодняк, С. В. Подлесный, А. В. Периг, А. А. Григорьев // «Качество образования – управление, сертификация, признание»: сборник научных работ международной научно-методической конференции / под общ. ред. проф. С. В. Ковалевского. – Краматорск : ДГМА, 2011. – С. 463–469. – ISBN 978-966-379-516-4.
7. Холодняк Ю. С. О методике изложения вопросов прочности двутавровой балки / Ю. С. Холодняк, А. В. Периг, И. А. Матвеев // «Современное образование и интеграционные процессы»: сборник научных работ международной научно-методической конференции / под общ. ред. д.т.н., проф. С. В. Ковалевского. – Краматорск : ДГМА, 2012. – С. 351–362. – ISBN 978-966-379-604-8.
8. Холодняк Ю. С. Совершенствование методики прочностного расчета двутавровой балки и её изложения в курсах технических дисциплин / Ю. С. Холодняк, А. В. Периг, И. А. Матвеев // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение = Вестник ПНИПУ. Машиностроение, материаловедение. – Пермь : ПНИПУ. – 2012. – т. 14. – № 4. – С. 77–89. – Библиогр. : с. 89. – ISSN 2224-9877. – Режим доступа : http://vestnik.pstu.ru/mm/archives/?id=&folder_id=1669
9. Холодняк Ю. С. О совершенствовании методики прочностных расчетов стержневых конструкций при вынужденных колебаниях и её изложения в курсах технических дисциплин / Ю. С. Холодняк, И. А. Матвеев // «Качество образования: управление, сертификация, признание»: сборник научных работ международной научно-методической конференции / под общ. ред. д.т.н., проф. С. В. Ковалевского. – Краматорск : ДГМА, 2013. – С. 172–180. – ISBN 978-966-379-656-7.
10. Збірник розрахунково-графічних завдань з курсу «Опір матеріалів»: нав. пос. / Л. В. Кутувий, В. А. Овчаренко [та ін.] – Краматорськ : ДДМА 2007. – 220 с.